



fecha de presentación: 01/02/2026, fecha de aceptación: 01/03/2026, fecha de publicación: 01/04/2026

Cándido Benito Silverio-Llanos

E-mail: csilverio02@uasd.edu.do

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-6912-6213>

Manuel Aurelio Diloné-Alvarado

E-mail: mdilone92@uasd.edu.do

Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-6555-1696>

Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Santo Domingo. República Dominicana

Cita sugerida (APA, séptima edición).

Silverio-Llanos, C. B., & Diloné-Alvarado, M. A. (2026). Dinámica del método de Newton en polinomios cuadráticos y de quinto grado. *Revista Sociedad & Tecnología*, 9(2), 229-245, DOI: <https://doi.org/10.51247/st.v9i2.726>.

==== o =====

Dinámica del Método de Newton en polinomios cuadráticos y de quinto grado

RESUMEN

El método de Newton es uno de los procedimientos iterativos más utilizados para la aproximación numérica de raíces de polinomios; sin embargo, su comportamiento dinámico presenta fenómenos complejos que trascienden su aplicación computacional clásica. El objetivo de este artículo fue analizar la dinámica inducida por el método de Newton aplicado a polinomios, con énfasis en la existencia y clasificación de órbitas periódicas en los casos de polinomios cuadráticos y de quinto grado, y en la influencia del grado del polinomio sobre la estabilidad de dichas órbitas. La metodología se desarrolló bajo un enfoque analítico-computacional. En primer lugar, se estudió teóricamente el operador de Newton como un mapa racional en el plano complejo, examinando sus puntos críticos, puntos fijos y multiplicadores asociados. Posteriormente, se resolvieron ecuaciones funcionales para localizar ciclos periódicos y se emplearon simulaciones numéricas como apoyo para la verificación y clasificación de las órbitas identificadas. Los resultados evidencian que los polinomios cuadráticos no admiten órbitas superatractoras distintas de los puntos fijos asociados a sus raíces, debido a restricciones estructurales de los mapas racionales de bajo grado, aunque sí presentan órbitas periódicas repulsoras. En contraste, los polinomios de quinto grado exhiben una dinámica más compleja, con múltiples órbitas repulsoras. Las conclusiones confirman que el grado del polinomio es un factor determinante en la complejidad dinámica del método de Newton, aportando evidencia teórica y computacional que amplía su comprensión desde una perspectiva dinámica y estructural.

Palabras clave: método de Newton; dinámica compleja; órbitas periódicas; órbitas repulsoras; polinomios.

==== o =====

Dynamics of Newton's Method in quadratic and fifth-degree polynomials

ABSTRACT

Newton's method is one of the most widely used iterative procedures for the numerical approximation of polynomial roots; however, its dynamic behavior exhibits complex phenomena that go beyond its classical computational application. The objective of this article

was to analyze the dynamics induced by Newton's method applied to polynomials, with emphasis on the existence and classification of periodic orbits in the cases of quadratic and fifth-degree polynomials, as well as on the influence of the polynomial degree on the stability of these orbits. The methodology followed an analytical–computational approach. First, the Newton operator was studied theoretically as a rational map on the complex plane, examining its critical points, fixed points, and associated multipliers. Subsequently, functional equations were solved to locate periodic cycles, and numerical simulations were employed to support the verification and classification of the identified orbits. The results show that quadratic polynomials do not admit superattracting orbits other than the fixed points associated with their roots, due to structural restrictions of low-degree rational maps, although they do exhibit repelling periodic orbits. In contrast, fifth-degree polynomials display a richer dynamic behavior, characterized by the presence of multiple repelling orbits. The conclusions confirm that the polynomial degree is a determining factor in the dynamic complexity of Newton's method, providing theoretical and computational evidence that broadens its understanding from a dynamic and structural perspective.

Keywords: Newton's method; complex dynamics; periodic orbits; repulsive orbits; polynomials

==== o ====

Dinâmica do Método de Newton em polinômios quadráticos e de quinto grau

RESUMO

O método de Newton é um dos procedimentos iterativos mais utilizados para a aproximação numérica das raízes de polinômios; entretanto, seu comportamento dinâmico apresenta fenômenos complexos que transcendem sua aplicação computacional clássica. O objetivo deste artigo foi analisar a dinâmica induzida pelo método de Newton aplicado a polinômios, com ênfase na existência e classificação de órbitas periódicas nos casos de polinômios quadráticos e de quinto grau, bem como na influência do grau do polinômio sobre a estabilidade dessas órbitas. A metodologia adotou uma abordagem analítico-computacional. Inicialmente, o operador de Newton foi estudado teoricamente como um mapa racional no plano complexo, examinando seus pontos críticos, pontos fixos e multiplicadores associados. Posteriormente, foram resolvidas equações funcionais para localizar ciclos periódicos, e simulações numéricas foram utilizadas como apoio à verificação e classificação das órbitas identificadas. Os resultados evidenciam que os polinômios quadráticos não admitem órbitas superatrativas distintas dos pontos fixos associados às suas raízes, em razão de restrições estruturais dos mapas racionais de baixo grau, embora apresentem órbitas periódicas repulsivas. Em contraste, os polinômios de quinto grau exibem uma dinâmica mais complexa, caracterizada pela presença de múltiplas órbitas repulsivas. As conclusões confirmam que o grau do polinômio é um fator determinante na complexidade dinâmica do método de Newton, fornecendo evidências teóricas e computacionais que ampliam sua compreensão sob uma perspectiva dinâmica e estrutural.

Palavras-chave: Método de Newton; dinâmica complexa; órbitas periódicas; órbitas repulsivas; polinômios.

==== o ====

INTRODUCCIÓN

El método de Newton constituye uno de los procedimientos iterativos más utilizados para la aproximación numérica de raíces de polinomios y funciones analíticas (Newton, 1736). Tradicionalmente valorado por su rapidez de convergencia en contextos locales, este método ha sido objeto de un creciente interés desde la perspectiva de la teoría de sistemas dinámicos,

donde su iteración se interpreta como un mapa racional que induce comportamientos complejos en el plano complejo (Villa, 2024).

En este marco, el estudio de las órbitas periódicas generadas por el operador de Newton resulta fundamental para comprender la estabilidad, la estructura global de la dinámica y las fronteras entre regiones de convergencia. El objeto de estudio de la presente investigación es la dinámica inducida por el método de Newton aplicado a polinomios, con énfasis en la existencia y clasificación de órbitas periódicas superatractoras y repulsoras.

En particular, se analizan los casos de polinomios cuadráticos y polinomios de quinto grado, atendiendo a cómo el grado del polinomio condiciona la aparición de determinados comportamientos dinámicos. El problema central que motiva este trabajo radica en esclarecer si, bajo la iteración de Newton, los polinomios de bajo grado pueden generar órbitas superatractoras distintas de los puntos fijos asociados a las raíces, así como en identificar la presencia de órbitas repulsoras y su papel en la organización del espacio dinámico (Flores Romero, 2024).

El objetivo general de esta investigación es demostrar la inexistencia de órbitas superatractoras en los polinomios cuadráticos bajo el método de Newton y, de manera complementaria, caracterizar la existencia de órbitas repulsoras tanto en polinomios cuadráticos como en polinomios de quinto grado (Parra Díaz, 2021).

Para ello, se combinan argumentos teóricos con análisis dinámico y verificación computacional, permitiendo una clasificación precisa de las órbitas periódicas identificadas. La importancia de este estudio se sustenta en su contribución al entendimiento teórico del método de Newton más allá de su aplicación numérica clásica. Desde el punto de vista matemático, la identificación de restricciones dinámicas en polinomios cuadráticos aporta claridad sobre los límites estructurales del método, mientras que el análisis de polinomios de mayor grado evidencia la transición hacia dinámicas más ricas y complejas.

En términos de utilidad, los resultados obtenidos permiten establecer criterios más precisos sobre la estabilidad de los procesos iterativos y ofrecen un marco de referencia para investigaciones futuras sobre métodos numéricos y mapas racionales. La relevancia del trabajo se refuerza por su vinculación con investigaciones previas en dinámica compleja, donde se ha demostrado que la naturaleza de las órbitas periódicas está estrechamente relacionada con la distribución de los puntos críticos del operador iterado.

Estudios clásicos y contemporáneos han analizado la dinámica del método de Newton para polinomios de grado arbitrario, destacando la aparición de ciclos atractores y superatractores en grados superiores, así como la compleja estructura de los conjuntos de Julia asociados. No obstante, el caso específico de los polinomios cuadráticos presenta particularidades que justifican un análisis independiente, especialmente en lo relativo a la inexistencia de órbitas superatractoras de período mayor que uno.

En este contexto, la presente investigación se apoya en una revisión bibliográfica especializada sobre dinámica del método de Newton, mapas racionales y teoría de órbitas periódicas, integrando aportes clásicos y resultados recientes. Esta fundamentación teórica permite situar el estudio en el estado actual del conocimiento y delimitar con claridad el aporte del trabajo, el cual consolida resultados obtenidos en investigaciones previas del autor y los extiende mediante un análisis comparativo con polinomios de quinto grado.

El método de Newton como proceso iterativo

El método de Newton es un algoritmo clásico para la aproximación de raíces de funciones, ampliamente utilizado en matemáticas aplicadas, ingeniería y ciencias computacionales debido a su rapidez de convergencia local (Antosiewicz, 1970; Marchenko, 2012; Ortega y Rheinboldt, 2000). Desde el punto de vista formal, el método de Newton define un proceso iterativo que puede expresarse, en el caso de un polinomio $p(z)$, mediante el operador

$$N(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

La iteración sucesiva de este operador genera una dinámica discreta cuya evolución depende tanto de las condiciones iniciales como de la estructura algebraica del polinomio considerado, lo que justifica su análisis desde la teoría de sistemas dinámicos y la dinámica compleja (Padilla Abellán, 2024; Stewart, 1996).

Esta interpretación permite estudiar el método no solo como un procedimiento numérico, sino como un operador que induce una dinámica compleja sobre el espacio en el que actúa.

Cuando el método de Newton se aplica a funciones polinómicas, el proceso iterativo queda determinado por un mapa racional, conocido como operador de Newton, cuya estructura depende directamente del grado y de las propiedades algebraicas del polinomio considerado. Esta formulación ha permitido analizar con mayor profundidad los fenómenos de convergencia, divergencia y sensibilidad a las condiciones iniciales que caracterizan a los métodos iterativos no lineales.

Dinámica compleja y mapas racionales

La teoría de la dinámica compleja estudia el comportamiento a largo plazo de iteraciones de funciones holomorfas y racionales en el plano complejo (Devaney, 2018). En este contexto, los mapas racionales constituyen una clase fundamental de funciones cuya iteración puede generar estructuras altamente complejas, como fractales y conjuntos de Julia (Milnor, 2011; Beardon, 2000; Shub, 2013). El operador de Newton asociado a un polinomio se inscribe dentro de esta categoría, lo que justifica el uso de herramientas teóricas propias de la dinámica compleja para su análisis.

Uno de los aspectos centrales en el estudio de los mapas racionales es la clasificación de sus órbitas periódicas según su estabilidad. Dicha clasificación permite distinguir entre órbitas atractoras, superatractoras, indiferentes y repulsoras, cada una de las cuales desempeña un papel específico en la organización global de la dinámica. La existencia o inexistencia de ciertos tipos de órbitas está estrechamente relacionada con la distribución de los puntos críticos del mapa iterado.

Órbitas periódicas y estabilidad

Las órbitas periódicas constituyen elementos fundamentales en el análisis de sistemas dinámicos discretos (Blanchard, 1994; McMullen, 1985). Una órbita periódica se define como una sucesión finita de puntos que se repite bajo la iteración del operador considerado.

$$\{z_0, N(z_0), N^2(z_0), \dots, N^{p-1}(z_0)\}$$

La estabilidad de estas órbitas se determina a partir del valor del multiplicador, el cual se obtiene como el producto de las derivadas del operador evaluadas a lo largo del ciclo. En particular, una órbita es denominada superatractora cuando su multiplicador es nulo, lo que implica una fuerte atracción de las trayectorias cercanas

$$|N^p(z)| = 0.$$

Por el contrario, una órbita es repulsora cuando el módulo de su multiplicador es mayor que uno, provocando la divergencia de las órbitas vecinas

$$|N^p(z)| > 1.$$

Esta clasificación resulta esencial para comprender la estructura de las cuencas de atracción y la complejidad del comportamiento global del método de Newton.

El grado del polinomio y la complejidad dinámica

Diversos estudios han evidenciado que el grado del polinomio desempeña un papel determinante en la dinámica del operador de Newton (Hubbard et al., 2001; Kalantari, 2008).

En polinomios de bajo grado, la estructura del mapa iterado presenta restricciones significativas que limitan la aparición de comportamientos dinámicos complejos.

En contraste, a medida que el grado del polinomio aumenta, el operador de Newton adquiere una mayor riqueza estructural, lo que favorece la aparición de órbitas periódicas de distinto tipo y una mayor complejidad en la frontera entre regiones de convergencia (Cobiaga, 2024).

Este hecho ha motivado investigaciones orientadas a comparar la dinámica del método de Newton en polinomios de distintos grados, con el fin de identificar patrones generales y excepciones relevantes. En este contexto, el análisis específico de polinomios cuadráticos y de quinto grado permite contrastar un caso de dinámica restringida con otro de mayor complejidad, aportando evidencia sobre cómo el grado influye en la estabilidad y diversidad de las órbitas periódicas (Villa, 2024).

Tecnología computacional y análisis dinámico

El desarrollo de herramientas computacionales ha permitido complementar el análisis teórico del método de Newton mediante simulaciones numéricas y visualizaciones gráficas. Estas herramientas facilitan la exploración del comportamiento dinámico del operador iterado, la identificación de órbitas periódicas y el estudio de su estabilidad, especialmente en casos donde el análisis puramente analítico resulta complejo.

Desde la perspectiva de la relación entre sociedad y tecnología, el uso de recursos computacionales en el estudio de métodos iterativos no solo amplía el alcance de la investigación matemática, sino que también fortalece la comprensión de algoritmos fundamentales que subyacen a múltiples aplicaciones tecnológicas contemporáneas (Cosquillo Chida, 2025).

En este sentido, el análisis dinámico del método de Newton se inserta en un marco más amplio que vincula el desarrollo teórico con la evolución de herramientas tecnológicas para la resolución de problemas complejos.

Metodología

La investigación se desarrolló bajo un enfoque analítico-computacional, propio de los estudios en dinámica compleja y análisis de métodos iterativos. Desde una perspectiva teórica, el método de Newton se interpretó como un mapa racional cuya iteración induce un sistema dinámico discreto en el plano complejo, lo que permite analizar su comportamiento mediante herramientas de la teoría de sistemas dinámicos. Este enfoque es consistente con trabajos clásicos que abordan los métodos de búsqueda de raíces desde una visión estructural y dinámica, más allá de su uso puramente numérico (Devaney, 2018; Milnor, 2011).

En una primera etapa, se realizó un análisis teórico del operador de Newton asociado a polinomios cuadráticos, examinando sus puntos fijos, puntos críticos y la naturaleza de las órbitas periódicas que pueden generarse bajo la iteración. A partir de la expresión explícita del operador, se estudió el multiplicador asociado a las órbitas periódicas con el fin de determinar su estabilidad. Este procedimiento permitió demostrar la inexistencia de órbitas superatractoras distintas de los puntos fijos asociados a las raíces del polinomio, resultado coherente con las restricciones dinámicas propias de los mapas racionales de bajo grado (Beardon, 2000; Blanchard, 1994).

Posteriormente, el análisis se extendió a polinomios de quinto grado, con el objetivo de identificar la aparición de órbitas periódicas repulsoras y comparar su comportamiento dinámico con el caso cuadrático. En esta fase, se combinaron argumentos analíticos con procedimientos de cálculo simbólico para resolver ecuaciones funcionales del tipo $N_f^k(z) = z$, lo que permitió localizar ciclos periódicos de período mayor que uno. El estudio del grado del polinomio y su influencia en la complejidad dinámica del operador de Newton se apoyó en resultados previos sobre algoritmos iterativos y búsqueda de raíces en el plano complejo (McMullen, 1985; Kalantari, 2008).

Finalmente, se incorporó una verificación computacional mediante simulaciones numéricas, orientada a ilustrar la existencia y naturaleza de las órbitas periódicas identificadas analíticamente. Estas simulaciones permitieron calcular de manera aproximada los multiplicadores asociados a los ciclos periódicos y confirmar su carácter repulsor. El uso de herramientas computacionales en el análisis dinámico del método de Newton resulta fundamental para explorar escenarios donde el tratamiento puramente analítico se vuelve complejo, y constituye una práctica ampliamente aceptada en el estudio moderno de métodos iterativos y sistemas dinámicos no lineales (Hubbard et al., 2001; Stewart, 1996).

RESULTADOS

Inexistencia de órbitas superatractoras en polinomios cuadráticos

Se demuestra que el método de Newton asociado a cualquier polinomio cuadrático no admite órbitas superatractoras. Este resultado se fundamenta en la estructura del operador de Newton y en la ausencia de puntos críticos que generen ciclos periódicos con multiplicador nulo (Milnor, 2011; McMullen, 1985).

Teorema. No existen ciclos superatractores de $N_p(z)$ para el polinomio de la forma

$$p(z) = az^2 + bz + c.$$

Demostración. Supongamos que $\{z_1, \dots, z_n\}$ es una órbita periódica de período n de $N_p(z)$, es decir,

$$\begin{cases} N_p(z_i) = z_i - \frac{p(z_i)}{p'(z_i)} = z_i - \frac{p(z_i)}{\frac{p(z_i)}{z_i - z_{i+1}}} = z_i - p(z_i) \cdot \frac{z_i - z_{i+1}}{p(z_i)} = z_i - (z_i - z_{i+1}) = z_{i+1} \\ N_p(z_n) = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)} = z_n - \frac{p(z_n)}{\frac{p(z_n)}{z_n - z_1}} = z_n - p(z_n) \cdot \frac{z_n - z_1}{p(z_n)} = z_n - (z_n - z_1) = z_1 \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Si esta órbita fuese superatractora, tendríamos que

$$\begin{aligned} (N_p^n)'(z_1) &= N_p'(z_n) \cdot \dots \cdot N_p'(z_1) = \frac{p(z_n)p''(z_n)}{(p'(z_n))^2} \cdot \dots \cdot \frac{p(z_1)p''(z_1)}{(p'(z_1))^2} \\ (N_p^n)'(z_1) &= \frac{(a(z_n)^2 + bz_n + c)(2a)}{(2az_n + b)^2} \cdot \dots \cdot \frac{(a(z_1)^2 + bz_1 + c)(2a)}{(2az_1 + b)^2} \\ (N_p^n)'(z_1) &= (2a)^n \frac{(a(z_n)^2 + bz_n + c) \cdot \dots \cdot (a(z_1)^2 + bz_1 + c)}{(2az_n + b)^2 \cdot \dots \cdot (2az_1 + b)^2} = 0. \end{aligned}$$

Y, por tanto, z_j , debería ser raíz de $p(z)$. Es decir,

$$z_j = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como estos son puntos fijos de $N_p(z)$, no pueden formar parte de ninguna órbita periódica. En consecuencia, la igualdad anterior no puede ser cierta.

Órbitas repulsoras en polinomios cuadráticos

A pesar de la inexistencia de órbitas superatractoras, se identifican órbitas repulsoras en el caso cuadrático. Estas órbitas se caracterizan por multiplicadores de módulo mayor que uno, lo que confirma su inestabilidad y su papel en la delimitación de regiones dinámicas.

Consideremos el polinomio $p(z) = az^2 + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Las raíces de la ecuación $p(z) = 0$ son:

$$z = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{-1} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} i.$$

Es decir que no existen órbitas reales, pero a pesar de que no tiene órbitas reales, nos interesa estudiar cómo es el comportamiento dinámico del método de Newton con este tipo de polinomios. En este caso, la función racional obtenida es

$$N_p(z) = z - \frac{az^2 + b}{2az},$$

la cual como pudo observarse, no tiene puntos fijos reales. Esto lo evidencia el hecho de que las raíces de $p(z)$ son los puntos fijos de $N_p(z)$, ni tampoco puntos críticos, ya que

$$N'_p(z) = \frac{(az^2 + b)(2a)}{(2az)^2} = 0,$$

implica que

$$z = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} i.$$

A continuación, la función de iteración $N_p(z)$ en busca de orbitas periódicas de período 2. Así, por simetría, observamos que $N_p(z) = z$, nos conduciría a encontrar los puntos fijos. En cambio, si hacemos $N_p(z) = -z$, obtendríamos órbitas periódicas. Veamos,

$$N_p(z) = z - \frac{az^2 + b}{2az} = -z$$

$$z + z = \frac{az^2 + b}{2az}$$

$$2z = \frac{az^2 + b}{2az}$$

$$2z \cdot 2az = az^2 + b$$

$$4az^2 = az^2 + b$$

$$4az^2 - az^2 = b$$

$$3az^2 = b$$

$$z^2 = \frac{b}{3a}$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{b}{3a}}.$$

Aquí, el análisis de $N_p(z)$ nos revela que aparece una órbita periódica de período 2, que es

$$\left\{ -\sqrt{\frac{b}{3a}}, \sqrt{\frac{b}{3a}} \right\}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} N_p\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= -\sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{a\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^2 + b}{2a\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)} = -\sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{a \cdot \frac{b}{3a} + b}{-2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} = -\sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{\frac{b}{3} + b}{-2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} \\ N_p\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= -\sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{\frac{b}{3} + \frac{3b}{3}}{-2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} = -\sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{\frac{4b}{3}}{-2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} = -\sqrt{\frac{b}{3a}} + \frac{\frac{4b}{3}}{2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} \\ N_p\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= -\sqrt{\frac{b}{3a}} + \frac{\frac{4b}{3}}{2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{b}{3a}}}{\sqrt{\frac{b}{3a}}} = -\sqrt{\frac{b}{3a}} + \frac{\frac{4b}{3} \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}}{2a \cdot \frac{b}{3a}} = -\sqrt{\frac{b}{3a}} + \frac{\frac{4b}{3} \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}}{\frac{2b}{3}} \\ N_p\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= -\sqrt{\frac{b}{3a}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}} = \sqrt{\frac{b}{3a}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N_p\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= \sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{a\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^2 + b}{2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} = \sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{a \cdot \frac{b}{3a} + b}{2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} = \sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{\frac{b}{3} + b}{2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} \\ N_p\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= \sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{\frac{b}{3} + \frac{3b}{3}}{2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} = \sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{\frac{4b}{3}}{2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} = \sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{\frac{4b}{3}}{2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{b}{3a}}}{\sqrt{\frac{b}{3a}}} \\ N_p\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= \sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{\frac{4b}{3} \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}}{2a \cdot \frac{b}{3a}} = \sqrt{\frac{b}{3a}} - \frac{\frac{4b}{3} \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}}{\frac{2b}{3}} = \sqrt{\frac{b}{3a}} - 2 \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}} = -\sqrt{\frac{b}{3a}}. \end{aligned}$$

Además, como

$$N'_p(z) = \frac{(az^2 + b)(2a)}{(2az)^2},$$

la cual es una función par, obtendremos

$$N'_p\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = N'_p\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = \frac{\left(a\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^2 + b\right)(2a)}{\left(2a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^2} = \frac{\left(a \cdot \frac{b}{3a} + b\right)(2a)}{4a^2 \cdot \frac{b}{3a}} = \frac{\left(\frac{b}{3} + b\right)(2a)}{4a \cdot \frac{b}{3}}$$

$$N'_p\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = N'_p\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = \frac{\frac{b}{3} + \frac{3b}{3}}{2 \cdot \frac{b}{3}} = \frac{\frac{4b}{3}}{\frac{2b}{3}} = 2.$$

Así,

$$(N_p^2)' \left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = N'_p\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) \cdot N'_p\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = 2 \cdot 2 = 4 > 1.$$

Entonces, por definición, la órbita periódica

$$\left\{-\sqrt{\frac{b}{3a}}, \sqrt{\frac{b}{3a}}\right\}$$

es repulsora para $N_p(z)$.

Órbitas repulsoras en polinomios de quinto grado

El análisis se extiende a polinomios de quinto grado, donde se observa una mayor riqueza dinámica. Se presentan ejemplos concretos de órbitas repulsoras y se describen sus propiedades, evidenciando cómo el aumento del grado del polinomio favorece la aparición de comportamientos dinámicos más complejos.

Consideremos el polinomio $p(z) = az^5 - bz$, $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$p(z) = az^5 - bz = z \cdot (az^4 - b) = 0,$$

de donde $z = 0$ y $az^4 - b = 0$, implica que

$$z^4 = \frac{b}{a}.$$

Por tanto,

$$z = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

En el plano complejo, las cuatro soluciones son:

$$z_k = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi k}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

es decir,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}, -\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}, i\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}, -i\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Al aplicar el método de Newton a $p(z)$, se obtiene

$$N_p(z) = z - \frac{az^5 - bz}{5az^4 - b}.$$

Si ahora calculamos la derivada, obtenemos

$$N'_p(z) = \frac{(az^5 - bz)(20az^3)}{(5az^4 - b)^2}.$$

Se tiene que, por ser puntos fijos simples,

$$N'_p(0) = N'_p\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = N'_p\left(-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = N'_p\left(i\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = N'_p\left(-i\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = 0,$$

y, por tanto, los puntos fijos son superatractores.

Para ver si N_p tiene órbitas periódicas, por simetría, busquemos z , tal que $N_p(z) = -z$. Es decir,

$$z - \frac{az^5 - bz}{5az^4 - b} = -z$$

$$z + z = \frac{az^5 - bz}{5az^4 - b}$$

$$2z = \frac{az^5 - bz}{5az^4 - b}$$

$$2z \cdot (5az^4 - b) = az^5 - bz$$

$$10az^5 - 2bz = az^5 - bz$$

$$10az^5 - az^5 = -bz + 2bz$$

$$9az^5 = bz$$

$$9az^5 - bz = 0$$

$$z(9az^4 - b) = 0.$$

Esto conduce a $z = 0$ y $9az^4 - b = 0$, de donde

$$z = \left(\frac{b}{9a}\right)^{\frac{1}{4}}$$

En el plano complejo, las cuatro soluciones son:

$$z_k = \left(\frac{b}{9a}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi k}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

es decir,

$$-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}, \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}, -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i, \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i$$

Por otra parte, notemos que

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{a\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^5 - b\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{5a\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^4 - b}$$

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{a\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^4\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) - b\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{5a\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^4 - b}$$

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{a \cdot \frac{b}{9a} \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) - b \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{5a \cdot \frac{b}{9a} - b}$$

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{\frac{b}{9} \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) - \frac{9b}{9} \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{\frac{5b}{9} - \frac{9b}{9}} = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{-\frac{8b}{9} \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{-\frac{4b}{9}}$$

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{\frac{8b}{9} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{-\frac{4b}{9}} = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}} + 2 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}$$

y

$$N_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^5 - b\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{5a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^4 - b} = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^4\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) - b\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{5a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^4 - b}$$

$$N_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{a \cdot \frac{b}{9a} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) - b \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{5a \cdot \frac{b}{9a} - b} = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{\frac{b}{9} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) - \frac{9b}{9} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{\frac{5b}{9} - \frac{9b}{9}}$$

$$N_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - \frac{-\frac{8b}{9} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)}{-\frac{4b}{9}} = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}} - 2 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}$$

De igual forma, notemos que

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{a\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^5 - b\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{5a\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^4 - b}$$

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{a\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^4\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) - b\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{5a\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^4 - b}$$

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{a \cdot \frac{b}{9a} \cdot 1 \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) - b \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{5a \cdot \frac{b}{9a} \cdot 1 - b}$$

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{\frac{b}{9} \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) - \frac{9b}{9} \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{\frac{5b}{9} - \frac{9b}{9}} = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{-\frac{8b}{9} \cdot \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{-\frac{4b}{9}}$$

$$N_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{\frac{8b}{9} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{-\frac{4b}{9}} = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i + 2 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i$$

y

$$N_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^5 - b\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{5a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^4 - b}$$

$$N_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^4\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) - b\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{5a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^4 - b}$$

$$N_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{a \cdot \frac{b}{9a} \cdot 1 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) - b \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{5a \cdot \frac{b}{9a} \cdot 1 - b}$$

$$N_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{\frac{b}{9} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) - \frac{9b}{9} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{\frac{5b}{9} - \frac{9b}{9}}$$

$$N_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - \frac{-\frac{8b}{9} \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)}{-\frac{4b}{9}} = \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i - 2 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = -\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i.$$

Por tanto,

$$\left\{-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}, \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right\}$$

y

$$\left\{-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i, \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right\}$$

Son órbitas periódicas de período 2 para N_p . Además, como

$$N'_p(z) = \frac{(az^5 - bz)(20az^3)}{(5az^4 - b)^2},$$

la cual es una función par, obtendremos

$$N'_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = N'_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = \frac{\left(a\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^5 - b\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)\right) \cdot 20a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^3}{\left(5a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^4 - b\right)^2}$$

$$N'_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = N'_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = \frac{\left(a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^8 - b\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^4\right) \cdot 20a}{\left(5a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right)^4 - b\right)^2} = \frac{\left(a\left(\frac{b}{9a}\right)^2 - b\left(\frac{b}{9a}\right)\right) \cdot 20a}{\left(5a\left(\frac{b}{9a}\right) - b\right)^2}$$

$$N'_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = N'_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = \frac{\frac{b}{9a} \cdot \left(a\left(\frac{b}{9a}\right) - b\right) \cdot 20a}{\left(\frac{5b}{9} - b\right)^2} = \frac{\frac{20b}{9} \cdot \left(\frac{b}{9} - b\right)}{\left(\frac{5b}{9} - b\right)^2} = \frac{\frac{20b}{9} \cdot \left(\frac{b}{9} - \frac{9b}{9}\right)}{\left(\frac{5b}{9} - \frac{9b}{9}\right)^2}$$

$$N'_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = N'_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right) = \frac{\frac{20b}{9} \cdot \left(-\frac{8b}{9}\right)}{\left(-\frac{4b}{9}\right)^2} = \frac{-\frac{20b}{9} \cdot \frac{8b}{9}}{\left(\frac{4b}{9}\right)^2} = \frac{-\frac{40b}{9} \cdot \left(\frac{4b}{9}\right)}{\left(\frac{4b}{9}\right)^2} = \frac{-\frac{40b}{9}}{\frac{4b}{9}} = -10$$

y

$$N'_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = N'_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = \frac{\left(a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^5 - b\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)\right) \cdot 20a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^3}{\left(5a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^4 - b\right)^2}$$

$$N'_p\left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = N'_p\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = \frac{\left(a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^8 - b\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^4\right) \cdot 20a}{\left(5a\left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right)^4 - b\right)^2}$$

$$N'_p(z) = \frac{\left(a\left(\frac{b}{9a}\right)^2 \cdot 1 - b\left(\frac{b}{9a}\right) \cdot 1\right) \cdot 20a}{\left(5a\left(\frac{b}{9a}\right) \cdot 1 - b\right)^2} = \frac{\frac{b}{9a} \cdot \left(a\left(\frac{b}{9a}\right) - b\right) \cdot 20a}{\left(\frac{5b}{9} - b\right)^2} = \frac{\frac{20b}{9} \cdot \left(\frac{b}{9} - b\right)}{\left(\frac{5b}{9} - b\right)^2}$$

$$N'_p(z) = \frac{\frac{20b}{9} \cdot \left(\frac{b}{9} - \frac{9b}{9}\right)}{\left(\frac{5b}{9} - \frac{9b}{9}\right)^2} = \frac{\frac{20b}{9} \cdot \left(-\frac{8b}{9}\right)}{\left(-\frac{4b}{9}\right)^2} = \frac{-\frac{20b}{9} \cdot \frac{8b}{9}}{\left(\frac{4b}{9}\right)^2} = \frac{-\frac{40b}{9} \cdot \left(\frac{4b}{9}\right)}{\left(\frac{4b}{9}\right)^2} = \frac{-\frac{40b}{9}}{\frac{4b}{9}} = -10.$$

Así,

$$\left\{-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}, \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}\right\}$$

y

$$\left\{-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i, \sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right\},$$

forman órbitas periódicas de período 2, las cuales son repulsoras para N_p , pues

$$(N_p^2)' \left(\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = (N_p^2)' \left(-\sqrt[4]{\frac{b}{9a}}i\right) = -10(-10) = 100 > 1.$$

DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos confirman, en concordancia con el marco teórico desarrollado, que el grado del polinomio desempeña un papel determinante en la dinámica inducida por el método de Newton. En particular, la inexistencia de órbitas superatractoras en el caso de los polinomios cuadráticos se explica por las restricciones estructurales propias de los mapas racionales de bajo grado, tal como se describe en la teoría de la dinámica compleja.

Asimismo, la aparición de órbitas repulsoras tanto en polinomios cuadráticos como en polinomios de grado superior pone de manifiesto que la inestabilidad periódica constituye un rasgo persistente del operador de Newton, independientemente del grado, aunque con

manifestaciones más diversas a medida que este aumenta. En este sentido, los polinomios de quinto grado exhiben una estructura dinámica más rica, lo cual es coherente con las observaciones teóricas previas sobre sistemas iterativos no lineales y mapas racionales de mayor complejidad.

LIMITACIONES DEL ESTUDIO

El presente estudio se centra en el análisis de la dinámica del método de Newton aplicado exclusivamente a polinomios cuadráticos y polinomios de quinto grado, lo cual implica que los resultados obtenidos no pueden generalizarse de manera inmediata a polinomios de grado arbitrario ni a funciones no polinómicas. Asimismo, el análisis teórico desarrollado se apoya en propiedades estructurales específicas del operador de Newton en estos casos particulares, por lo que la validez de las conclusiones depende del cumplimiento estricto de las hipótesis planteadas en cada resultado.

Otra limitación relevante radica en el alcance del estudio de las órbitas periódicas, el cual se restringe a la identificación y clasificación de órbitas superatractoras y repulsoras. No se aborda de forma exhaustiva la existencia de órbitas atractoras no superatractoras ni de órbitas indiferentes, ni se realiza un análisis detallado de la topología global de los conjuntos de Julia asociados a los operadores de Newton considerados. De igual manera, la exploración computacional realizada tiene un carácter ilustrativo y no pretende agotar el espacio de parámetros posibles para los polinomios analizados.

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA

A partir de los resultados obtenidos, se abren diversas líneas de investigación futura que podrían ampliar y profundizar el alcance del presente trabajo. En primer lugar, resulta natural extender el análisis a polinomios de grado mayor que cinco, con el objetivo de identificar patrones generales en la aparición de órbitas repulsoras y en la posible existencia de órbitas atractoras o superatractoras para grados superiores. Este enfoque permitiría establecer relaciones más amplias entre el grado del polinomio y la complejidad dinámica del método de Newton.

En segundo lugar, futuras investigaciones podrían incorporar un estudio más detallado de la estructura global de los conjuntos de Julia y de las cuencas de atracción asociadas a los operadores de Newton analizados, utilizando herramientas avanzadas de dinámica compleja y visualización computacional. Asimismo, se plantea como línea futura el análisis comparativo entre el método de Newton y otros métodos iterativos, tales como el método de Halley o esquemas de orden superior, con el fin de evaluar similitudes y diferencias en la aparición de órbitas periódicas y comportamientos caóticos.

RECONOCIMIENTOS

Los autores expresamos nuestro agradecimiento a los docentes y asesores académicos que acompañaron el desarrollo de la investigación de maestría de la cual se derivan parte de los resultados presentados en este artículo, por sus orientaciones teóricas y metodológicas. También, se reconoce el apoyo institucional recibido durante el proceso de formación académica, así como el acceso a recursos bibliográficos y computacionales que facilitaron el desarrollo del análisis teórico y experimental. Finalmente, se agradece a los evaluadores anónimos por sus observaciones y sugerencias, las cuales contribuyeron a mejorar la claridad y el rigor del presente trabajo.

CONCLUSIONES

El presente artículo aporta evidencia teórica y dinámica que confirma la influencia decisiva del grado del polinomio en el comportamiento del método de Newton, al demostrar que los polinomios cuadráticos imponen restricciones estructurales que impiden la existencia de

órbitas superatractoras, mientras que permiten la aparición de órbitas repulsoras con un papel organizador en la dinámica global. Este resultado contribuye a clarificar los límites de complejidad dinámica del método de Newton en casos de bajo grado, fortaleciendo su comprensión desde una perspectiva estructural y no únicamente numérica.

Además, la extensión del análisis a polinomios de quinto grado evidencia una transición hacia dinámicas más ricas y diversas, lo que refuerza la idea de que el incremento del grado polinómico favorece la aparición de comportamientos iterativos más complejos. Desde una perspectiva tecnológica, estos hallazgos resultan relevantes para el diseño y análisis de algoritmos iterativos, ya que permiten anticipar escenarios de inestabilidad y sensibilidad a las condiciones iniciales en procesos computacionales basados en el método de Newton.

En general, los resultados obtenidos no solo consolidan aportes previos de los autores, sino que también abren nuevas líneas de investigación orientadas al estudio de polinomios de mayor grado y a la comparación con otros métodos iterativos, contribuyendo al desarrollo de un marco teórico más amplio sobre la dinámica de algoritmos fundamentales en matemáticas y tecnología.

REFERENCIAS

- Antosiewicz, H. A. (1970). Computational solution of nonlinear operator equations.
- Beardon, A. F. (2000). *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems* (Vol. 132). Springer Science & Business Media.
- Blanchard, P. (1994, December). The dynamics of Newton's method. In *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* (Vol. 49, pp. 139-154). Providence, RI, USA: American Mathematical Society.
- Cobiaga, R. P. (2024). *Órbitas periódicas en sistemas dinámicos y el Método de Análisis Homotópico*. [Tesis doctoral, Universidad Nacional del Sur-Argentina]. <https://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/7049>
- Cosquillo Chida, J. L., Lara Macías, L. A., Góngora Caicedo, K. J., Núñez Calle, J. J., Villarreal Pallo, C. N., & Allauca Melena, M. L. (2025). Simulaciones Dinámicas como Innovación en Modelado Matemático: Aplicaciones, Métodos y Desafíos Computacionales. *Revista Científica De Salud Y Desarrollo Humano*, 6(1). <https://doi.org/10.61368/r.s.d.h.v6i1.546>
- Devaney, R. (2018). *An introduction to chaotic dynamical systems*. CRC press.
- Flores Romero, E. K. (2024). *Estudio de métodos iterativos para encontrar las raíces de funciones compleja valuadas*. [Tesis de grado, Universidad Central del Ecuador]. <https://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/34715>
- Hubbard, J., Schleicher, D., & Sutherland, S. (2001). How to find all roots of complex polynomials by Newton's method. *Inventiones mathematicae*, 146(1), 1-33.
- Kalantari, B. (2008). *Polynomial root-finding and polynomiography*. World Scientific.
- Marchenko, V. A. (2012). *Nonlinear equations and operator algebras* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.
- McMullen, C. T. (1985). *Families of rational maps and iterative root-finding algorithms (dynamics, complex analysis, newton's method)*. Harvard University. FAMILIES OF

RATIONAL MAPS AND ITERATIVE ROOT-FINDING ALGORITHMS (DYNAMICS, COMPLEX ANALYSIS, NEWTON'S METHOD) - ProQuest

- Milnor, J. (2011). *Dynamics in one complex variable* (Vol. 160). Princeton University Press.
- Mosquera, J. D. (2024). Análisis de los elementos constitutivos de una propuesta investigativa rigurosa con fundamento en la Metodología de la investigación: Revisión Documental desde la comparación teórica y la simplificación del discurso. *Review of Contemporary Philosophy* 23(2), 7041 -7071. https://www.researchgate.net/profile/Julian-Salcedo-Mosquera/publication/391020506_Analisis_de_los_elementos_constitutivos_de_una_propuesta_investigativa_rigurosa_con_fundamento_en_la_Metodologia_de_la_investigacion_Revision_Documental_desde_la_comparacion_teorica_y_la_simplificacio/links/68086395ded433155736b665/Analisis-de-los-elementos-constitutivos-de-una-propuesta-investigativa-rigurosa-con-fundamento-en-la-Metodologia-de-la-investigacion-Revision-Documental-desde-la-comparacion-teorica-y-la-simplificacio.pdf
- Newton, I. (1736). *The method of fluxions and infinite series: with its application to the geometry of curve-lines*. Nourse.
- Ortega, J. M., & Rheinboldt, W. C. (2000). *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Padilla Abellán, J. J. (2024). *Diseño, implementación y análisis dinámico, de familias paramétricas de métodos iterativos, para ecuaciones y sistemas no lineales*. [Tesis doctoral, Universidad Católica de Murcia-España]. <http://hdl.handle.net/10952/7974>
- Parra Díaz, M. A. (2021). *Aplicaciones de Hénon: límite inverso de polinomios cuadráticos*, [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/79854>
- Shub, M. (2013). *Global stability of dynamical systems*. Springer Science & Business Media.
- Stewart, G. W. (1996). *Afternotes on numerical analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Villa, A. G. (2024). *Introducción a la teoría de los sistemas dinámicos*. [Tesis de grado, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador]. <https://dspace.esPOCH.edu.ec/handle/123456789/23434>